

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ
диагностической работы для учителей математики

Выполните каждое из заданий 1–13 и запишите ответы

Часть 1.

Предметная подготовка

1. Решите уравнение $\sqrt{63 - 2x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: _____ (7)

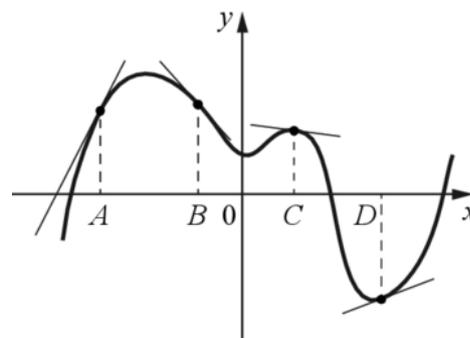
2. Телефонная компания предлагает на выбор три тарифных плана.

| Тарифный план | Абонентская плата (в месяц) | Плата за 1 минуту разговора |
|-------------------|--------------------------------|--|
| «Повременный» | Нет | 1 руб. |
| «Комбинированный» | 160 руб. за 300 минут | 1 руб. 50 коп (за минуты свыше 300 минут) |
| «Безлимитный» | 499 руб. | Нет |

Абонент предполагает, что общая длительность его разговоров составит 500 минут в месяц, и исходя из этого выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если общая длительность разговоров составит 450 минут?

Ответ: _____ (385)

3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательные к этому графику, проведённые в точках с абсциссами A , B , C и D .



В правом столбце указаны значения производной функции в этих точках. Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждой точке значение производной в этой точке.

ТОЧКИ

ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

A

1) $-\frac{2}{15}$

3) $\frac{5}{13}$

B

C

2) 2

4) $-1\frac{2}{15}$

D

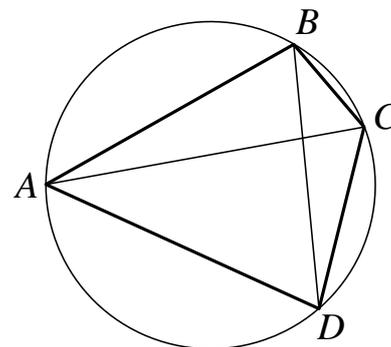
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| | | | |

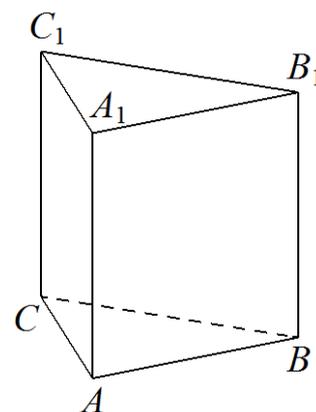
Ответ: _____ (2413).

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 98° , угол CAD равен 44° . Найдите угол ABD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____ (54)

5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, A_1 и C_1 .



Ответ: _____(28)

6. Четырёхзначное число N делится на 5. Если цифры этого числа записать в обратном порядке, то получится другое четырёхзначное число, которое меньше числа N на 1629. Найдите какое-нибудь одно число N , удовлетворяющее указанному свойству.

Ответ: _____ (Одно из чисел 6705, 6815 или 6925)

Часть 2.

Методическая подготовка

7. Определите последовательности этапов работы с элементами математического содержания

Правильная последовательность шагов алгоритма для деления дробей

- 1: Определить делимое
- 2: Определить делитель
- 3: Найти дробь, обратную делителю
- 4: Делимое умножить на число, обратное делителю, по правилу умножения дроби на дробь
- 5: Если возможно, полученную дробь сократить
- 6: Записать ответ

8. Определение математического базиса выполняемых действий.

Решите следующую геометрическую задачу: «В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны». Какие теоретические факты должны использовать учащиеся при обосновании ее решения?

- : формулу площади трапеции;
- +: свойство площадей равноставленных фигур;
- +: формулу площади треугольника;
- +: свойство длин перпендикуляров, расположенных между двумя параллельными прямыми;
- : признаки подобия треугольников.

9. Соответствие между задачами и приемами их решения или между основанием классификации математических задач и классом

Установите соответствие задач на сравнение чисел и целесообразных приемов их решения:

L1: $\frac{8}{3}$ и $\frac{3}{8}$;

L2: $\frac{51}{100}$ и 1;

L3: $\frac{3}{27}$ и $\frac{3}{51}$;

L4: $\frac{8}{15}$ и $\frac{4}{15}$;

L5: 1 и $\frac{107}{101}$.

R1: Свойство сравнения правильной и неправильной дроби

R2: Использование определения и свойства правильной дроби;

R3: Сравнение знаменателей при одинаковых числителях

R4: Сравнение числителей при одинаковых знаменателях

R5: Использование определения и свойства неправильной дроби;

R6: Приведение дробей к общему знаменателю и сравнение их числителей;

10. Типология задач по математической основе или по методу решения

Выберите задачу, которая решаются способом исключения неизвестных.

+ 11 апельсинов и 9 лимонов стоят 245 рублей, один апельсин и один лимон стоят 25 рублей. Сколько стоит один лимон?

- 15 кг яблок стоят 600 рублей. Сколько кг яблок можно купить на 400 рублей?

- Сумма тринадцати различных натуральных чисел равна 92. Найдите эти числа.

- На первой полке книг в 6 раз больше, чем на второй. Известно, что на ней на 150 книг больше, чем на второй. Сколько книг на каждой полке?

11. Выбор математических обоснований при ответе на вопросы ученика

Выберите обоснование для ответа на вопрос ученика: «Почему, если в конце десятичной дроби приписать нули, то ее величина не изменится?»

Приписывание нулей в конце десятичной дроби соответствует операции

+ приведения обыкновенной дроби к новому знаменателю

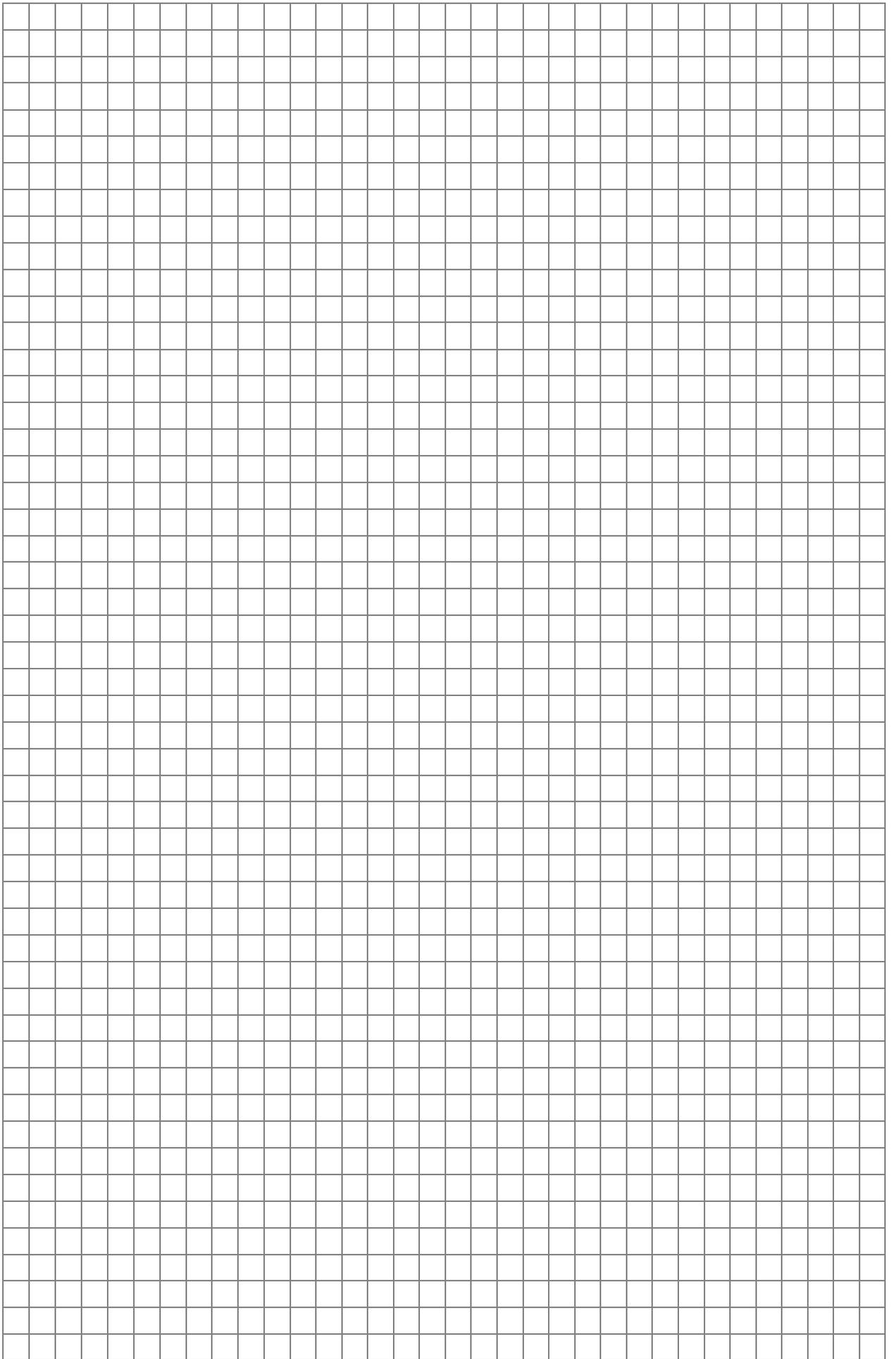
- деления числителя и знаменателя дроби на одно и то же число

- умножения числителя и знаменателя дроби на 5

+ умножения числителя и знаменателя дроби на одну и ту же натуральную степень 10

- сокращения дроби

12. Поиск причины ошибки



б) По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin B} = 2 \cdot 4 \Rightarrow AC = 8 \sin B$$

$$S_{\text{площадь } \triangle ABC}, S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \sin B = 12 \sin B$$

Рассмотрим окруж., описанную вокруг $\triangle BМК$ (она же описана вокруг $BМКН$): $\angle BКН = 90^\circ \Rightarrow ВН$ - ее диаметр \Rightarrow
 \Rightarrow ее радиус равен 1,5.

По т. синусов:

$$\frac{МК}{\sin B} = 2 \cdot 1,5 \Rightarrow МК = 3 \sin B$$

$$\text{коэф. подобия } k = \frac{МК}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

S_1 - площадь $\triangle МВК$, S_2 - площадь $\triangle КМС$

$$\frac{S_1}{S} = k^2 = \frac{1}{16} \quad S_1 = \frac{S}{16}$$

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow S_2 = S \cdot \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{15}$$

Критерии оценивания

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | 3 |

Пример решения аналогичной задачи (к заданию 13)

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

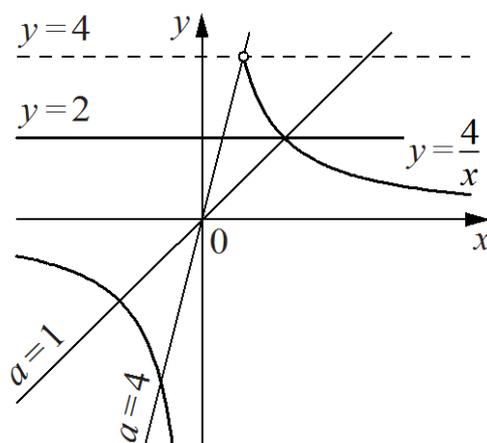
Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{4-y}} = 0.$$

При $y \geq 4$ левая часть не имеет смысла.

При $y < 4$ уравнение задаёт прямую $y = 2$

и гиперболу $y = \frac{4}{x}$ (см. рисунок).



При каждом значении a уравнение $y = ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a , проходящую через начало координат.

При $y < 4$ такая прямая пересекает прямую $y = 2$ при любом ненулевом значении a ,

пересекает правую ветвь гиперболы $y = \frac{4}{x}$ при $0 < a < 4$, пересекает левую ветвь

гиперболы $y = \frac{4}{x}$ при $a > 0$. При этом прямая $y = ax$ проходит через точку пересечения

прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$

при $a = 1$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения

прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$ с прямой $y = ax$ при условии $y < 4$.

Таким образом, исходная система имеет ровно три решения при

$$0 < a < 1; 1 < a < 4.$$

Ответ: $0 < a < 1$; $1 < a < 4$.

